

**10****Mathematik****(3)**

In der Jahrgangsstufe 10 können die Schüler zunehmend komplexe Sachzusammenhänge mathematisch erfassen. Dies spiegelt sich in den neu zu erwerbenden Kenntnissen und Denkweisen wider. Die Jugendlichen erweitern und vertiefen ihr Wissen über Funktionen und gewinnen dabei das für die folgenden Jahrgangsstufen erforderliche fundierte Verständnis für funktionale Zusammenhänge, wie es auch für Anwendungen z. B. in Naturwissenschaften und Technik unabdingbar ist. Sie beschäftigen sich mit neuen Funktionstypen wie den ganzrationalen Funktionen und der Exponentialfunktion. In einer Zusammenschau aller bisher bekannten Funktionen erwerben die Schüler einen aus der Anschauung gewonnenen Grenzwertbegriff. Insbesondere beim Untersuchen von Exponentialfunktionen, aber auch bei der Fortführung der Trigonometrie bearbeiten sie zahlreiche praxisbezogene Fragestellungen, die ihnen die Bedeutung der Mathematik für unsere Lebenswelt weiter verdeutlichen.

In dieser Jahrgangsstufe befassen sich die Jugendlichen erneut mit dem Kreis, wobei nun Überlegungen zu Grenzprozessen im Vordergrund stehen. Sie runden dabei ihr Wissen über reelle Zahlen ab und vertiefen ihren Einblick in die historische Entwicklung sowie die kulturelle Bedeutung der Mathematik. Bei der Untersuchung der Kugel und bei Berechnungen an zusammengesetzten Körpern wird ihnen wiederum bewusst, dass geometrische Methoden und algebraische Verfahren einander ergänzen.

In der Stochastik bauen die Schüler ihre Kenntnisse über zusammengesetzte Zufallsexperimente aus. Bei den im Vergleich zu Jahrgangsstufe 9 anspruchsvolleren Sachverhalten lernen die Jugendlichen, verschiedene Lösungsstrategien einzusetzen und Aussagen kritisch zu überprüfen.

*In der Jahrgangsstufe 10 erwerben die Schüler folgendes Grundwissen:*

- Sie können Volumen und Oberflächeninhalt von Kugeln bestimmen.
- Sie können sicher mit Sinus und Kosinus für beliebige Winkel umgehen.
- Sie verstehen die Bedeutung der Exponentialfunktion zur Beschreibung von Wachstumsprozessen in Natur, Technik und Wirtschaft.
- Sie können einfache Exponentialgleichungen lösen und mit Logarithmen rechnen.
- Sie können mit Exponentialfunktionen, trigonometrischen und ganzrationalen Funktionen sowie mit einfachen gebrochen-rationalen Funktionen umgehen.
- Sie können bei komplexeren mehrstufigen Zufallsexperimenten Wahrscheinlichkeiten mithilfe von Pfadregeln bestimmen.
- Sie sind mit einem aus der Anschauung gewonnenen Grenzwertbegriff vertraut.

**M 10.1 Kreiszahl  $\pi$** 

In Jahrgangsstufe 8 haben sich die Schüler bereits mit der Kreismessung beschäftigt, die Formeln für Umfang und Flächeninhalt kennengelernt sowie erste Näherungswerte für  $\pi$  ermittelt. Aufbauend auf diesen Grundkenntnissen betrachten sie nun leistungsstärkere Näherungsverfahren zur Bestimmung der Kreiszahl  $\pi$  und erkennen die Notwendigkeit, Grenzprozesse durchzuführen. Am Beispiel der Kugel wird veranschaulicht, dass ähnliche Grenzprozesse auch bei räumlichen Betrachtungen angewendet werden können.

**M 10.1.1 Kreis (ca. 8 Std.)**

Die Schüler ermitteln mithilfe eines numerischen Verfahrens [→ Inf 9.1 Tabellenkalkulationssysteme] Näherungswerte für  $\pi$ . Dabei werden sie von elektronischen Hilfsmitteln wie einem Tabellenkalkulationsprogramm unterstützt. Sie erfahren, dass sich Gelehrte seit über zweitausend Jahren immer wieder mit der Kreiszahl  $\pi$  und der „Quadratur des Kreises“ beschäftigt haben.

- näherungsweise Bestimmung der Kreiszahl  $\pi$
- Bogenmaß
- Berechnungen an Figuren, die elementare Kreisteile enthalten

**M 10.1.2 Kugel (ca. 8 Std.)**

An vielfältigen Beispielen wird den Schülern deutlich, dass die Kugel im Alltag und bei naturwissenschaftlicher Modellbildung eine besondere Rolle spielt. Sie ermitteln Formeln für Volumen und Oberflächeninhalt der Kugel

und führen bei typischen anwendungsbezogenen Fragestellungen, z. B. aus der Natur oder Architektur, Berechnungen an Körpern durch.

- Oberflächeninhalt und Volumen der Kugel
- Anwendungen aus Sachzusammenhängen, z. B. **Groß- und Kleinkreise auf der Kugel**

#### M 10.2 Geometrische und funktionale Aspekte der Trigonometrie (ca. 14 Std.)

Beispielsweise bei Fragen der Landvermessung erkennen die Schüler, dass die bisherige Definition trigonometrischer Funktionen verallgemeinert werden muss. Mit Sinus- und Kosinussatz erwerben sie Hilfsmittel, die ihnen Berechnungen an beliebigen ebenen Dreiecken erlauben. Die Schüler ergänzen die Menge der ihnen bereits bekannten Funktionen durch die Sinus- und Kosinusfunktion. Sie lernen Periodizität als ein neues, charakteristisches Merkmal von Funktionen kennen und untersuchen den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion. Dabei nutzen sie die Möglichkeit zur Veranschaulichung mithilfe von Funktionsplottern.

- Sinus und Kosinus am Einheitskreis
- **Sinus- und Kosinussatz im Dreieck**
- Sinus- und Kosinusfunktion
- Anwendungen in Sachzusammenhängen

#### M 10.3 Exponentielles Wachstum und Logarithmen (ca. 18 Std.)

Vielfältige Beispiele aus Natur, Technik und Wirtschaft machen den Jugendlichen die große Bedeutung von Wachstums- und Zerfallsprozessen bewusst; beispielsweise beim Bevölkerungswachstum bzw. beim radioaktiven Zerfall erkennen sie, dass Wachstums- und Abklingprozesse häufig durch Exponentialfunktionen modelliert werden können. Aufbauend auf ihrem Wissen über Potenzen lernen sie die Exponentialfunktion sowie deren charakteristische Eigenschaften kennen und stellen insbesondere am Verlauf der zugehörigen Funktionsgraphen fest, wie sich exponentielles von linearem Wachstum unterscheidet.

Bei unterschiedlichen Problemstellungen, z. B. bei Altersbestimmungen, stellen die Jugendlichen Exponentialgleichungen auf, deren Lösung zur Definition des Logarithmus führt. Die Jugendlichen lernen, mit Logarithmen umzugehen.

- Beispiele für exponentiellen Anstieg und exponentielle Abnahme [→ Ph 9.2 Radioaktivität], Abgrenzung des exponentiellen Wachstums von linearem Wachstum
- allgemeine Exponentialfunktion
- Begriff des Logarithmus, Rechenregeln für Logarithmen [→ C<sub>NTG</sub> 9.4, C 10.2 pH-Wert]
- einfache Exponentialgleichungen

#### M 10.4 Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente (ca. 10 Std.)

Die Schüler haben sich bereits in der vorhergehenden Jahrgangsstufe mit zusammengesetzten Zufallsexperimenten beschäftigt, dabei aber nur einfachere Fälle betrachtet. Nun wenden sie sich anspruchsvolleren Fragestellungen zu, wobei sie Zusammenhänge **wieder** durch Vierfeldertafeln und Baumdiagramme veranschaulichen. Daran lernen sie den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit kennen und erfahren insbesondere bei Fragestellungen aus dem Alltag, dass bei Aussagen über die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses Zusatzinformationen zu berücksichtigen sind. Die Jugendlichen gewinnen so zunehmend an objektiver Urteilsfähigkeit.

- Anwenden der Pfadregeln, Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“

#### M 10.5 Ausbau der Funktionenlehre

Die Schüler erweitern das Spektrum der ihnen bekannten Funktionsarten um die ganzrationalen Funktionen und entwickeln ihre Fähigkeiten weiter, funktionale Zusammenhänge zu untersuchen. Sie vertiefen ihr Verständnis dafür, wie sich Eigenschaften von Funktionsgraph und Funktionsterm wechselseitig bedingen. Grundlegende Merkmale, z. B. die Nullstellen oder die Symmetrie von Graphen, stehen dabei im Mittelpunkt. Ihr Wissen über funktionale Zusammenhänge setzen die Schüler flexibel ein, etwa beim graphischen Lösen von Gleichungen. Überlegungen an Funktionsgraphen festigen auch den intuitiv vorhandenen Grenzwertbegriff der Schüler, die so

auf anschauliche Weise diesen grundlegenden Begriff der Infinitesimalrechnung kennenlernen.

#### M 10.5.1 Graphen ganzrationaler Funktionen (ca. 7 Std.)

Aufbauend auf ihrem bisherigen Wissen über Funktionen untersuchen die Jugendlichen ganzrationale Funktionen. Sie erfahren, dass zum Skizzieren eines Graphen einige wenige wesentliche Informationen genügen. In diesem Zusammenhang ermitteln sie Art und Lage von Nullstellen sowie das Verhalten der Funktionen an den Rändern des Definitionsbereichs.

- Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten
- ganzrationale Funktionen und ihre Nullstellen (Ermittlung z. B. über Polynomdivision), Vorzeichenbetrachtungen

#### M 10.5.2 Vertiefen der Funktionenlehre (ca. 19 Std.)

Bisher haben die Schüler ganzrationale, einfache gebrochen-rationale und trigonometrische Funktionen sowie Exponentialfunktionen kennengelernt. Sie wiederholen Grundbegriffe und analysieren vertiefend verschiedene Eigenschaften ausgewählter Graphen. Dabei ermitteln sie beispielsweise Nullstellen von Funktionen und wiederholen Techniken zur Lösung von Gleichungen. Die Schüler üben, den Verlauf von Graphen unter Verwendung der entsprechenden Fachbegriffe, wie z. B. Steigen und Fallen, mit Worten zu beschreiben. Sie erkennen in Analogie zum Vorgehen etwa bei quadratischen oder trigonometrischen Funktionen, wie sich Veränderungen des Funktionsterms auf den Kurvenverlauf auswirken. Anhand ausgewählter Beispiele wird ihnen deutlich, dass jeder Term in einer Variablen auch als Funktionsterm interpretiert werden kann, und sie denken über Möglichkeiten nach, wie Informationen über den Verlauf der zugehörigen Graphen erschlossen werden können, auch wenn diese nicht zu den bisher bekannten Typen gehören.

Anhand des unterschiedlichen Verhaltens von Funktionen an den Rändern ihres jeweiligen Definitionsbereichs gewinnen die Schüler aus der Anschauung heraus einen Grenzwertbegriff und verwenden erstmals systematisch die Grenzwertschreibweise.

- Überblick über die bisher bekannten Funktionstypen
- Eigenschaften ausgewählter Graphen: gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie bezüglich y-Achse oder Ursprung (auch rechnerischer Nachweis)
- [Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs, aus der Anschauung gewonnener Grenzwertbegriff für  \$x \rightarrow \pm\infty\$](#)
- Einfluss der Änderung von Parametern im Funktionsterm auf den Graphen, vor allem Verschieben oder Strecken des Graphen, Spiegeln an den Koordinatenachsen